Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: ***бакалавр***

на тему ***«Локальна асимптотична стабілізація класу нелінійних систем з невідомими параметрами»***

Виконав: студент групи МП-41 IV курсу
(перший бакалаврський рівень),
спеціальності 113
“Прикладна математика”
освітньої програми
“Прикладна математика”
Борейко А.О.

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри
прикладної математики
Бебія М.О.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук,
науковий співробітник
відділу математичної фізики
Фізико-технічного інституту
низьких температур
імені Б. І. Вєркіна НАН України
Гукалов О.О.

Харків — 2024 рік

Анотації

Борейко А.О. Локальна асимптотична стабілізація класу нелінійних систем з невідомими параметрами.

У роботі розглядається задача локальної асимптотичної стабілізації для класу двовимірних та тривимірних нелінійних систем з невідомими параметрами в критичному випадку. Ніяких умов на границі зміни максимальної величини цих невідомих параметрів заздалегідь не задано. Для стабілізації систем застосовано клас вкладених керувань. Дослідження задачі стабілізації ґрунтується на методі функції Ляпунова. Ефективність такого підходу проілюстрована на прикладах.

Boreiko A.O. Local asymptotic stabilization of a class of nonlinear systems with unknown parameters.

This paper considers local asymptotic stabilization of two-dimensional and three-dimensional nonlinear systems with unknown parameters in a critical case. No conditions on the maximum values of these unknown parameters are specified in advance. A class of nonlinear nested controls is used to stabilize the systems. The Lyapunov function method is used for the stability analysis. The effectiveness of this approach is illustrated by examples.

Зміст

Вступ та постановка задачі

На практиці важливу роль відіграють математичні моделі, які можуть бути описані керованими системами диференціальних рівнянь з невідомими параметрами - невизначеностями. Присутність невизначеностей може пояснюватися похибками вимірювання або наявністю заздалегідь невідомих параметрів. Більшість результатів стосовно стабілізації таких систем були отримані у випадку заздалегідь відомих границь для зміни невідомих параметрів системи [1,2]. При відсутності інформації про границі зміни невизначеностей, задача стабілізації стає дуже складною.

У розділі 1.1 розглядається двовимірна нелінійна система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2^{2m+1}, \\ \dot{x}_2 = a_2 u, \end{cases} \tag{0.1}$$

де $a_i > 0$ - невідомі параметри ($i = 1, 2$), u - керування, $m \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, \ldots\}$.

У розділі 2.1 розглядається тривимірна нелінійна система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2^{2m+1}, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_3, \\ \dot{x}_3 = a_3 u, \end{cases} \tag{0.2}$$

де $a_i > 0$ - невідомі параметри ($i = 1, 2, 3$), u - керування, $m \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, \ldots\}$.

Відмітимо, що єдиною умовою, яка накладається на параметри a_i є їх додатність. При цьому, ніяких умов на границі зміни максимальної величини параметрів a_i заздалегідь не задано. Важливо зазначити, що задача стабілізація систем (0.1) та (0.2) є доволі складною, навіть для відомих коефіцієнтів a_i, бо ці системи є некерованими та нестійкими за першим наближенням. Випадок таких систем в теорії керування називають критичним.

Випадок відомих параметрів a_i для суттєво нелінійних n-вимірних систем вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_i = a_i x_{i+1}^{2m_i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ \dot{x}_n = a_n u, \end{cases}$$

досліджувався, наприклад, в роботах [5–7]. А випадок невідомих параметрів a_i для суттєво нелінійних систем раніше не досліджувався.

Важливий результат для лінійних систем $(m = 0)$ з невідомими коефіцієнтами було отримано в роботі [3]. У цій роботі було використано важливий для методу зворотного ходу (backstepping method) клас вкладених керувань (nested controls). Такий клас керувань використовується і в даній роботі.

Задача стабілізації систем (0.1), (0.2) полягає в побудові неперервного керування $u(x)$, яке не залежить від параметрів a_i, такого, що нульова точка спокою відповідної системи при $u = u(x)$ буде асимптотично стійкою за Ляпуновим [8].

Значущість класу вкладених керувань можна побачити з наступного прикладу [3]. Розглянемо 3-вимірну лінійну систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_3, \\ \dot{x}_3 = a_3 u. \end{cases} \tag{0.3}$$

Покажемо, що керування у вигляді лінійної функції $u = u_1(x)$, де

$$u_1(x) = -(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3),$$

не може забезпечити локальну асимптотичну стійкість нульової точки спокою

$x = 0$ для всіх невідомих параметрів $a_i > 0, i = 1, \ldots, 3$. Характеристичний поліном системи (0.3) при $u = u_1(x)$ має вигляд

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -a_1 & 0 \\ 0 & \lambda & -a_2 \\ a_3k_1 & a_3k_2 & \lambda + a_3k_3 \end{vmatrix} = \lambda^3 + a_3k_3\lambda^2 + a_2a_3k_2\lambda + a_1a_2a_3k_1.$$

Випишемо визначник Гурвіца

$$H = \begin{pmatrix} a_3k_3 & a_1a_2a_3k_1 & 0 \\ 1 & a_2a_3k_2 & 0 \\ 0 & a_3k_3 & a_1a_2a_3k_1 \end{pmatrix}. \tag{0.4}$$

За критерієм Гурвіца, система (0.3) стійка, коли усі діагональні мінори визначника (0.4) додатні, тобто

$$\begin{cases} \Delta_1 = a_3k_3 > 0, \\ \Delta_2 = a_2a_3^2k_2k_3 - a_1a_2a_3k_1 > 0, \\ \Delta_3 = a_1a_2a_3k_1 \cdot \Delta_2 > 0, \end{cases} \quad \overset{a_i>0}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} k_3 > 0, \\ \dfrac{a_3}{a_1} > \dfrac{k_1}{k_2k_3}, \\ k_1 > 0. \end{cases}$$

Очевидно, що для будь-якого заданого лінійного керування, остання система нерівностей буде задоволена не для всіх значень параметрів $a_i > 0$. Отже, відповідна лінійна система (0.3) має асимптотично стійку нульову точку спокою не для всіх додатних значень параметрів a_i.

Отже, щоб подолати обмеження лінійних керувань, замінимо лінійну структуру керування шляхом збільшення степенів доданків. Наприклад, лінійне керування $u = -(k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n)$ замінимо на

$$u = -((\ldots((k_1x_1)^{p_1} + k_2x_2)^{p_2} + \ldots + k_{n-1}x_{n-1})^{p_{n-1}} + k_nx_n). \tag{0.5}$$

Будемо вимагати, щоб $p_i = \dfrac{r_{i+1}}{r_i}$, причому

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{odd}{odd} > 1, \\ r_{i+1} = r_i + \mu_i, \\ \mu_i = \dfrac{even}{odd} > 0, \\ \mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_n = 0, \\ k_i > 0, i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{0.6}$$

Далі буде показано, що керування вигляду (0.5) розв'язує задачу стабілізації систем з невідомими параметрами (0.1) та (0.2). Дослідження задачі стабілізації ґрунтується на методі функції Ляпунова, який полягає в побудові додатно визначеної функції $V(x)$, похідна від якої в силу відповідної замкнутої системи є від'ємною в деякому проколотому околі початку координат.

Розділ 1

Стабілізація двовимірної системи

1.1. Побудова функції Ляпунова

Розглянемо систему (0.1), яка має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2^{2m+1}, \\ \dot{x}_2 = a_2 u, \end{cases}$$

де $a_1, a_2 > 0$ - невідомі константи, $m \in \mathbb{Z}^+$. Керування (0.5) має вигляд

$$u = -((k_1 x_1)^p + k_2 x_2). \tag{1.1}$$

Побудуємо функцію Ляпунова у вигляді

$$V(x) = \frac{k_2}{k_1 a_1} \frac{(k_1 x_1)^{2p}}{2p} + \frac{1}{k_2 a_2} \frac{u^2}{2} = R_1 + R_2.$$

Тоді похідна в силу системи (0.1) з керуванням u вигляду (1.1) обчислюється за формулою $\dot{V}(x) = \dot{R}_1 + \dot{R}_2$, де

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = \dfrac{k_2}{k_1 a_1} \cdot (k_1 x_1)^{2p-1} k_1 \dot{x}_1 = \dfrac{k_2}{a_1} (k_1 x_1)^{2p-1} \dot{x}_1, \\ \dot{R}_2 = \dfrac{u}{k_2 a_2} \cdot \dot{u} = \dfrac{u}{k_2 a_2} \left(- \left[p (k_1 x_1)^{p-1} k_1 \dot{x}_1 + k_2 \dot{x}_2 \right] \right). \end{cases}$$

Тут $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ позначають відповідні праві частини рівнянь системи (0.1). Підставимо ці праві частини.

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = k_2(k_1x_1)^{2p-1}x_2^{2m+1}, \\ \dot{R}_2 = -\dfrac{u}{k_2a_2}\left(p\left[k_1x_1\right]^{p-1}k_1a_1x_2^{2m+1} + k_2a_2u\right). \end{cases}$$

Далі ми покажемо, що похідна функції Ляпунова є від'ємною в деякому проколотому околі нуля.

1.2. Заміна змінних

Введемо наступні позначення

$$\begin{cases} \phi_1 = k_1x_1, \\ \phi_2 = \phi_1^p + k_2x_2. \end{cases}$$

Запишемо $\dot{R}_1, \dot{R}_2$ у термінах ϕ_1, ϕ_2.

$$\begin{cases} \dot{R}_1 & = k_2\phi_1^{2p-1}\dfrac{\left(\phi_2 - \phi_1^p\right)^{2m+1}}{k_2^{2m+1}} = \dfrac{1}{k_2^{2m}}\phi_1^{2p-1}\left(\phi_2 - \phi_1^p\right)^{2m+1}, \\ \dot{R}_2 & = -u^2 - \dfrac{u}{k_2a_2}\left(pk_1a_1\phi_1^{p-1}\dfrac{\left(\phi_2 - \phi_1^p\right)^{2m+1}}{k_2^{2m+1}}\right) \\ & = -u^2 - \dfrac{pk_1a_1}{k_2^{2m+2}a_2}\phi_1^{p-1}\left(\phi_2 - \phi_1^p\right)^{2m+1}u. \end{cases}$$

1.3. Оцінка похідної функції Ляпунова

Далі нам знадобляться наступні твердження [3, 7]:

Твердження 1.1. *Для будь-яких* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *та* $p \geq 1$ *виконується наступна нерівність*

$$|x_1 + \ldots + x_n|^p \leq n^{p-1}\Big(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p\Big).$$

Твердження 1.2. *Для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}$ та $C > 0$ виконується наступна нерівність*

$$a \cdot b \leq \frac{1}{1+C}|a|^{1+C} + \frac{C}{1+C}|b|^{1+\frac{1}{C}}.$$

Наслідок 1.3. *Для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}$ та $x, y > 0$ виконується наступна нерівність*

$$a^x \cdot b^y \leq |a|^{x+y} + |b|^{x+y}.$$

Це можна показати, скориставшись твердженням 1.2 для $C = \dfrac{y}{x}$.

Твердження 1.4. *Для будь-яких $x, h \in \mathbb{R}$ та $p \geq 1$ виконується наступна нерівність*

$$-x \cdot (x+h)^p \leq -2^{1-p} \cdot x^{p+1} - x \cdot h^p.$$

1.3.1. Оцінка першого доданка

Застосуємо твердження 1.4 і отримаємо

$$\begin{aligned}
\dot{R}_1 &= \frac{1}{k_2^{2m}}\phi_1^{2p-1}\left(\phi_2 - \phi_1^p\right)^{2m+1} = \frac{1}{k_2^{2m}}\phi_1^{p-1}(-\phi_1^p)\left(\phi_1^p - \phi_2\right)^{2m+1} \\
&\leq \frac{1}{k_2^{2m}}\phi_1^{p-1}\left(-2^{1-(2m+1)} \cdot (\phi_1^p)^{(2m+1)+1} - \phi_1^p \cdot (-\phi_2)^{2m+1}\right) \\
&= \frac{1}{k_2^{2m}}\phi_1^{p-1}\left(-4^{-m} \cdot \phi_1^{2p(m+1)} + \phi_1^p \cdot \phi_2^{2m+1}\right) \\
&= -\frac{1}{4^m k_2^{2m}}\phi_1^{p(2m+3)-1} + \frac{1}{k_2^{2m}}\phi_1^{2p-1}\phi_2^{2m+1}
\end{aligned}$$

Скористаємось твердженням 1.2 для оцінки другого доданка. Для цього виберемо таке $C_0 > 0$, для якого справедлива система нерівностей

$$\begin{cases}
(1+C_0)(2p-1) > p(2m+3) - 1, \\
\left(1 + \dfrac{1}{C_0}\right)(2m+1) > 2.
\end{cases}$$

Отже, розкриваючи дужки, отримуємо наступну систему

$$\begin{cases} C_0 > \dfrac{p(2m+1)}{2p-1}, \\ \dfrac{1}{C_0} > \dfrac{1-2m}{2m+1}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Зауважимо, що $p > 1$ в силу умови (0.6), тому із першої нерівності системи (1.2) випливає $C_0 > \dfrac{p(2m+1)}{2p-1} > 0$.

1. При $m > 0$, дріб $\dfrac{1-2m}{2m+1} < 0$. Отже, друга нерівність системи (1.2) справедлива для всіх $C_0 > 0$;

2. При $m = 0$, із (1.2), маємо $\dfrac{p}{2p-1} < C_0 < 1$. Зауважимо, що проміжок для знаходження C_0 непустий. Дійсно, $\dfrac{p}{2p-1} < 1 \Leftrightarrow 1 < p$, що правда в силу умови (0.6).

Отже, при $m = 0$ виберемо $C_0 \in \left(\dfrac{p}{2p-1}; 1\right)$. При $m > 0$ виберемо C_0 з умови: $C_0 > \dfrac{p(2m+1)}{2p-1}$. Згідно з твердженням 1.2, для такого C_0 буде справедливою наступна нерівність

$$\phi_1^{2p-1}\phi_2^{2m+1} \leq |\phi_1|^{2p-1}|\phi_2|^{2m+1} \leq \frac{1}{1+C_0}|\phi_1|^{(1+C_0)(2p-1)} + \frac{C_0}{1+C_0}|\phi_2|^{(1+\frac{1}{C_0})(2m+1)}.$$

1.3.2. Оцінка другого доданка

Застосуємо твердження 1.1 і отримаємо

$$\begin{aligned}
\dot{R}_2 &= -u^2 - \frac{pk_1a_1}{k_2^{2m+2}a_2}\phi_1^{p-1}\left(\phi_2 - \phi_1^p\right)^{2m+1} u \\
&= -u^2 - \frac{pk_1a_1}{k_2^{2m+2}a_2}\phi_1^{p-1} u\left(-u - \phi_1^p\right)^{2m+1} \\
&\leq -u^2 + \frac{pk_1a_1}{k_2^{2m+2}a_2}\phi_1^{p-1}|u|\left(|u| + |\phi_1|^p\right)^{2m+1} \\
&\leq -u^2 + \frac{pk_1a_1}{k_2^{2m+2}a_2}\phi_1^{p-1}|u| \cdot 2^{2m+1-1}\left(|u|^{2m+1} + |\phi_1|^{(2m+1)p}\right) \\
&= -u^2 + \frac{4^m pk_1a_1}{k_2^{2m+2}a_2}\phi_1^{p-1}u^{2m+2} + \frac{4^m pk_1a_1}{k_2^{2m+2}a_2}|\phi_1|^{2p(m+1)-1}|u|
\end{aligned}$$

Скористаємось твердженням 1.2 для оцінки другого та третього доданків.

Оцінка доданка $\phi_1^{p-1}u^{2m+2}$

Виберемо таке $C_1 > 0$, для якого виконується система

$$\begin{cases}
(1 + C_1)(p-1) > p(2m+3) - 1, \\
\left(1 + \dfrac{1}{C_1}\right)(2m+2) > 2.
\end{cases}$$

Отже, розкриваючи дужки, отримуємо наступну систему

$$\begin{cases}
C_1 > \dfrac{2p(m+1)}{p-1}, \\
\dfrac{1}{C_1} > -\dfrac{m}{m+1}.
\end{cases}$$

Очевидно, що $p > 1$ в силу умови (0.6), тому $C_1 > \dfrac{2p(m+1)}{p-1} > 0$. Також очевидно, що $-\dfrac{m}{m+1} \leq 0, \forall m \in \mathbb{Z}^+$, тобто система виконується для будь-якого $C_1 > \dfrac{2p(m+1)}{p-1}$. Тому $\forall m \in \mathbb{Z}^+$, вибравши $C_1 \in \left(\dfrac{2p(m+1)}{p-1}; +\infty\right)$, маємо

$$\phi_1^{p-1}u^{2m+2} \leq |\phi_1|^{p-1}|\phi_2|^{2m+2} \leq \frac{1}{1+C_1}|\phi_1|^{(1+C_1)(p-1)} + \frac{C_1}{1+C_1}|\phi_2|^{(1+\frac{1}{C_1})(2m+2)}.$$

Оцінка доданка $|\phi_1|^{2p(m+1)-1}|u|$

Виберемо таке $C_2 > 0$ для якого виконується система

$$\begin{cases} (1+C_2)(2p(m+1)-1) > p(2m+3)-1, \\ 1+\dfrac{1}{C_2} > 2. \end{cases}$$

Отже, розкриваючи дужки, отримуємо наступну систему

$$\begin{cases} C_2 > \dfrac{p}{2p(m+1)-1}, \\ 0 < C_2 < 1. \end{cases}$$

Очевидно $\dfrac{p}{2p(m+1)-1} > 0$. Крім того, проміжок $\left(\dfrac{p}{2p(m+1)-1}; 1\right)$ – не пустий, бо

$$\frac{p}{2p(m+1)-1} < 1 \Leftrightarrow p < 2p(m+1)-1 \Leftrightarrow 1 < p+2pm,$$

що правда в силу умови (0.6). Тому $\forall m \in \mathbb{Z}^+, \forall C_2 \in \left(\dfrac{p}{2p(m+1)-1}; 1\right)$:

$$|\phi_1|^{2p(m+1)-1}|u| \leq \frac{1}{1+C_2}|\phi_1|^{(1+C_2)(2p(m+1)-1)} + \frac{C_2}{1+C_2}|\phi_2|^{1+\frac{1}{C_2}}$$

згідно з твердженням 1.2.

1.3.3. Доведення від'ємної визначенності похідної функції Ляпунова

В силу результатів пунктів 1.3.1 та 1.3.2 маємо:

$$
\begin{aligned}
\dot{V} = \dot{R}_1 + \dot{R}_2 &\leq -\frac{1}{4^m k_2^{2m}} \phi_1^{p(2m+3)-1} - u^2 + \frac{1}{k_2^{2m}} \phi_1^{2p-1} \phi_2^{2m+1} \\
&+ \frac{4^m p k_1 a_1}{k_2^{2m+2} a_2} \phi_1^{p-1} u^{2m+2} + \frac{4^m p k_1 a_1}{k_2^{2m+2} a_2} |\phi_1|^{2p(m+1)-1} |u| \\
&\leq -\frac{1}{4^m k_2^{2m}} \phi_1^{p(2m+3)-1} - u^2 + \frac{1}{k_2^{2m}} \frac{1}{1+C_0} |\phi_1|^{(1+C_0)(2p-1)} \\
&+ \frac{1}{k_2^{2m}} \frac{C_0}{1+C_0} |\phi_2|^{(1+\frac{1}{C_0})(2m+1)} + \frac{4^m p k_1 a_1}{k_2^{2m+2} a_2} \frac{1}{1+C_1} |\phi_1|^{(1+C_1)(p-1)} \\
&+ \frac{4^m p k_1 a_1}{k_2^{2m+2} a_2} \frac{C_1}{1+C_1} |\phi_2|^{(1+\frac{1}{C_1})(2m+2)} + \frac{4^m p k_1 a_1}{k_2^{2m+2} a_2} \frac{C_2}{1+C_2} |\phi_2|^{1+\frac{1}{C_2}} \\
&+ \frac{4^m p k_1 a_1}{k_2^{2m+2} a_2} \frac{1}{1+C_2} |\phi_1|^{(1+C_2)(2p(m+1)-1)} \\
&= -\frac{1}{4^m k_2^{2m}} \phi_1^{p(2m+3)-1} - u^2 + H(\phi).
\end{aligned}
$$

Нагадаємо, що $u = -\phi_2$. Зауважимо, що C_0, C_1, C_2 були вибрані таким чином, щоб доданок $H(\phi)$ складався з таких членів, степені яких є вищими за степені головних доданків $-\frac{1}{4^m k_2^{2m}} \phi_1^{p(2m+3)-1}, -u^2$ (зауважимо, що $p(2m+3)-1$ є відношенням парного числа до непарного числа).

Отже, існує проколотий окіл нуля такий, в якому $\dot{V}(x) < 0$. Оскільки $V(x) > 0$ при $||x|| \neq 0$, тривіальний розв'язок x = 0 є асимптотично стійким за Ляпуновим.

1.4. Приклади

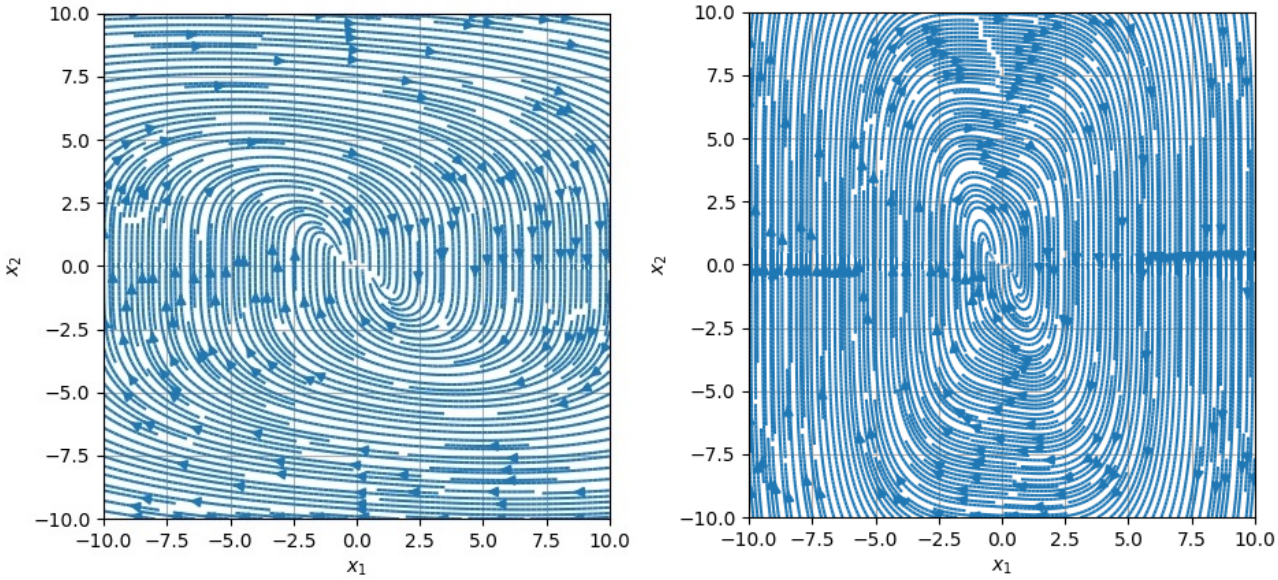
Приклад 1.5. Покладемо $k_1 = 2, k_2 = 3, m = 1, a_1 = 10, a_2 = 20$. Тоді керування (0.5) має вигляд

$$u = -((2x_1)^p + 3x_2). \tag{1.3}$$

Отже, система (0.1) має вигляд

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = 10x_2^3, \\
\dot{x}_2 = -20((2x_1)^p + 3x_2).
\end{cases}
\tag{1.4}
$$

Побудуємо фазові портрети системи (1.4) для різних p.



(а) $p = \dfrac{17}{13}$ (б) $p = \dfrac{37}{13}$

Рис. 1.1: Фазові портрети системи (1.4).

Приклад 1.6. Покладемо $k_1 = 3, k_2 = 5, r_1 = 7, r_2 = 13, m = 1$. Тоді керування (0.5) має вигляд

$$
u = -((3x_1)^{\frac{13}{7}} + 5x_2).
\tag{1.5}
$$

Згідно з отриманими результатами, керування u вигляду (1.5) стабілізує систему (0.1) для будь-яких додатних параметрів a_1, a_2. Таким чином, маємо систему

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = a_1 x_2^3, \\
\dot{x}_2 = -a_2((3x_1)^{\frac{13}{7}} + 5x_2).
\end{cases}
\tag{1.6}
$$

Для наочності, зобразимо траєкторії системи (1.6), що відповідають різним наборам параметрів a_1, a_2, вибраних випадково. А саме:

a_1	a_2
83.392	5.748
87.862	62.298
56.434	0.929
88.746	1.34
86.01	5.171

В якості початкової точки виберемо, наприклад, точку $x_0 = (1, 1)$.

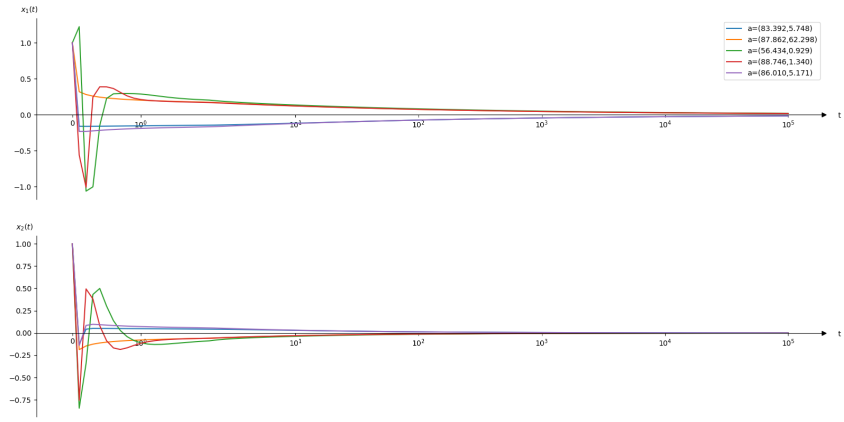


Рис. 1.2: Траєкторії $x_1(t), x_2(t)$.

Розділ 2

Стабілізація тривимірної системи

Нагадаємо, що система (0.2) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2^{2m+1}, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_3, \\ \dot{x}_3 = a_3 u, \end{cases}$$

де $a_i > 0$ - невідомі параметри ($i = 1, 2, 3$), u - керування, $m \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, \ldots\}$.

Далі, використовуючи метод функції Ляпунова, буде побудовано стабілізуюче керування, яке не залежить від невідомих параметрів a_i.

2.1. Побудова функції Ляпунова

Керування (0.5) має вигляд

$$u = -(((k_1 x_1)^{p_1} + k_2 x_2)^{p_2} + k_3 x_3). \tag{2.1}$$

Побудуємо функцію Ляпунова у вигляді

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{k_2}{k_1 a_1} \frac{(k_1 x_1)^{2p_1 p_2}}{2p_1 p_2} + \frac{k_3}{k_2 a_2} \frac{((k_1 x_1)^{p_1} + k_2 x_2)^{2p_2}}{2p_2} + \frac{1}{k_3 a_3} \frac{u^2}{2} \\ &= R_1 + R_2 + R_3. \end{aligned}$$

Тоді похідна в силу системи (0.2) з керуванням u вигляду (2.1) обчислюється за формулою $\dot{V}(x) = \dot{R}_1 + \dot{R}_2 + \dot{R}_3$, де

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = \dfrac{k_2}{a_1}(k_1x_1)^{2p_1p_2-1}\dot{x}_1, \\ \dot{R}_2 = \dfrac{k_3}{k_2a_2}((k_1x_1)^{p_1} + k_2x_2)^{2p_2-1}(p_1(k_1x_1)^{p_1-1}k_1\dot{x}_1 + k_2\dot{x}_2), \\ \dot{R}_3 = -\dfrac{u}{k_3a_3}\Big(p_2((k_1x_1)^{p_1} + k_2x_2)^{p_2-1}(p_1(k_1x_1)^{p_1-1}k_1\dot{x}_1 + k_2\dot{x}_2) + k_3\dot{x}_3\Big). \end{cases}$$

Тут $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ позначають відповідні праві частини рівнянь системи (0.2). Підставимо ці праві частини в систему.

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = (k_1x_1)^{2p_1p_2-1}k_2x_2^{2m+1}, \\ \dot{R}_2 = \dfrac{k_3}{k_2a_2}((k_1x_1)^{p_1} + k_2x_2)^{2p_2-1}(p_1k_1a_1(k_1x_1)^{p_1-1}x_2^{2m+1} + k_2a_2x_3), \\ \dot{R}_3 = -u^2 - \dfrac{up_2}{k_3a_3}((k_1x_1)^{p_1} + k_2x_2)^{p_2-1}(p_1k_1a_1(k_1x_1)^{p_1-1}x_2^{2m+1} + k_2a_2x_3). \end{cases}$$

Далі ми покажемо, що похідна функції Ляпунова є від'ємною в деякому проколотому околі нуля, що буде ґарантувати асимптотичну стійкость нульової точки спокою відповідної замкнутої системи.

2.2. Заміна змінних

Введемо наступні позначення

$$\begin{cases} \phi_1 = k_1x_1, \\ \phi_2 = \phi_1^{p_1} + k_2x_2, \\ \phi_3 = \phi_2^{p_2} + k_3x_3 = -u. \end{cases}$$

Тоді в термінах змінних ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 отримаємо наступні вирази для $\dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{R}_3$:

$$\begin{cases} \dot{R}_1 & = k_2\phi_1^{2p_1p_2-1}\left(\dfrac{\phi_2-\phi_1^{p_1}}{k_2}\right)^{2m+1} \\ & = \dfrac{1}{k_2^{2m}}\phi_1^{2p_1p_2-1}\left(\phi_2-\phi_1^{p_1}\right)^{2m+1}, \\ \dot{R}_2 & = \dfrac{k_3}{k_2a_2}\phi_2^{2p_2-1}\left(p_1k_1a_1\phi_1^{p_1-1}\left(\dfrac{\phi_2-\phi_1^{p_1}}{k_2}\right)^{2m+1}+k_2a_2\cdot\dfrac{\phi_3-\phi_2^{p_2}}{k_3}\right) \\ & = -\phi_2^{3p_2-1}-u\phi_2^{2p_2-1}+\dfrac{p_1k_1a_1k_3}{k_2^{2m+2}a_2}\phi_1^{p_1-1}\phi_2^{2p_2-1}\left(\phi_2-\phi_1^{p_1}\right)^{2m+1}, \\ \dot{R}_3 & = -u^2-\dfrac{p_2k_2a_2u}{k_3^2a_3}\phi_2^{p_2-1}\left(\dfrac{k_3p_1k_1a_1}{k_2^{2m+2}a_2}\phi_1^{p_1-1}\left(\phi_2-\phi_1^{p_1}\right)^{2m+1}+\phi_3-\phi_2^{p_2}\right). \end{cases}$$

2.3. Оцінка похідної функції Ляпунова

Доведемо, що похідна від функції Ляпунова менше нуля в деякому околі початку координат. Наступні нерівності будуть справедливими в деякій кулі радіуса ε, в якій $|\phi_i(x)| < 1$. Така куля, очевидно, існує, бо $\phi_i(0) = 0$ та ϕ_i - неперервні.

Застосуємо твердження 1.4:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= \frac{1}{k_2^{2m}}\phi_1^{2p_1p_2-1}\left(\phi_2-\phi_1^{p_1}\right)^{2m+1} = \frac{1}{k_2^{2m}}\phi_1^{2p_1p_2-1-p_1}\left(-\phi_1^{p_1}\right)\left(\phi_1^{p_1}-\phi_2\right)^{2m+1} \\ &\le \frac{1}{k_2^{2m}}\phi_1^{2p_1p_2-1-p_1}\left(-\frac{1}{4^m}\phi_1^{(2m+2)p_1}+\phi_1^{p_1}\phi_2^{2m+1}\right) \\ &= -\frac{1}{4^mk_2^{2m}}\phi_1^{2p_1p_2-1+(2m+1)p_1}+\frac{1}{k_2^{2m}}\phi_1^{2p_1p_2-1}\phi_2^{2m+1}. \end{aligned}$$

Застосуємо твердження 1.1:

$$\begin{aligned} \dot{R}_2 &= -\phi_2^{3p_2-1}-u\phi_2^{2p_2-1}+\frac{p_1k_1a_1k_3}{k_2^{2m+2}a_2}\phi_1^{p_1-1}\phi_2^{2p_2-1}\left(\phi_2-\phi_1^{p_1}\right)^{2m+1} \\ &\le -\phi_2^{3p_2-1}-u\phi_2^{2p_2-1}+\frac{p_1k_1a_1k_3}{k_2^{2m+2}a_2}|\phi_1|^{p_1-1}|\phi_2|^{2p_2-1}\left|\phi_2-\phi_1^{p_1}\right|^{2m+1} \\ &\le -\phi_2^{3p_2-1}-u\phi_2^{2p_2-1}+4^m\frac{p_1k_1a_1k_3}{k_2^{2m+2}a_2}|\phi_1|^{p_1-1}|\phi_2|^{2p_2-1}\left(|\phi_2|^{2m+1}+|\phi_1|^{(2m+1)p_1}\right) \end{aligned}$$

$$\leq -\phi_2^{3p_2-1} - u\phi_2^{2p_2-1} + 4^m \frac{p_1 k_1 a_1 k_3}{k_2^{2m+2} a_2} \left(\phi_1^{p_1-1} \phi_2^{2p_2+2m} + |\phi_1|^{(2m+2)p_1-1} |\phi_2|^{2p_2-1} \right).$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & -\frac{1}{4^m k_2^{2m}} \phi_1^{2p_1p_2-1+(2m+1)p_1} - \phi_2^{3p_2-1} - u^2 + \frac{1}{k_2^{2m}} \phi_1^{2p_1p_2-1} \phi_2^{2m+1} \\
& - u\phi_2^{2p_2-1} + 4^m \frac{p_1 k_1 a_1 k_3}{k_2^{2m+2} a_2} \left(\phi_1^{p_1-1} \phi_2^{2p_2+2m} + |\phi_1|^{(2m+2)p_1-1} |\phi_2|^{2p_2-1} \right) \\
& - \frac{p_2 k_2 a_2}{k_3^2 a_3} u \phi_2^{p_2-1} \left(\frac{k_3 p_1 k_1 a_1}{k_2^{2m+2} a_2} \phi_1^{p_1-1} \left(\phi_2 - \phi_1^{p_1} \right)^{2m+1} - u - \phi_2^{p_2} \right) \\
& = -\frac{1}{4^m k_2^{2m}} \phi_1^{2p_1p_2-1+(2m+1)p_1} - \phi_2^{3p_2-1} - u^2 + R(\phi_1, \phi_2, \phi_3).
\end{aligned}$$

Перші три доданка - знакопостійні, бо всі степені в них є відношенням парного числа до непарного. Дійсно

1. $2p_1p_2 - 1 + (2m+1)p_1 = 2\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} - 1 + (2m+1)\frac{r_2}{r_1} = \frac{2r_3 + (2m+1)r_2 - r_1}{r_1} = \frac{even}{odd}$,
2. $3p_2 - 1 = 3 \cdot \frac{r_3}{r_2} - 1 = \frac{3r_3 - r_2}{r_2} = \frac{even}{odd}$.

Далі буде показано, що перші три доданки будуть головними в тому сенсі, що сами вони будуть визначати знак похідної функції Ляпунова в малому околі початку координат. Інші доданки $R(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ можна вважати доданками більш високого порядку. Далі ми оцінемо ці доданки більш високого порядку.

2.3.1. Оцінка першого доданка

Оцінемо доданок $\frac{1}{k_2^{2m}} \phi_1^{2p_1p_2-1} \phi_2^{2m+1}$. Виберемо таке $C_0 > 0$, для якого виконується система

$$\begin{cases}
(1 + C_0)(2p_1p_2 - 1) > 2p_1p_2 - 1 + (2m+1)p_1, \\
\left(1 + \frac{1}{C_0}\right)(2m+1) > 3p_2 - 1.
\end{cases}$$

Отже, розкриваючи дужки, отримуємо наступну систему

$$\begin{cases} C_0 > \dfrac{(2m+1)p_1}{2p_1p_2-1} > 0, \\ \dfrac{1}{C_0} < \dfrac{3p_2-2m-2}{2m+1}. \end{cases}$$

1. $p_2 < \dfrac{2m+2}{3} \Rightarrow \dfrac{3p_2-2m-2}{2m+1} < 0 \Leftrightarrow C \in \left(\dfrac{(2m+1)p_1}{2p_1p_2-1}; +\infty\right)$

2. $p_2 > \dfrac{2m+2}{3} \Rightarrow C \in \left(\dfrac{(2m+1)p_1}{2p_1p_2-1}; \dfrac{2m+1}{3p_2-2m-2}\right)$

   Покажемо, що проміжок не пустий:

$$\frac{(2m+1)p_1}{2p_1p_2-1} < \frac{2m+1}{3p_2-2m-2} \Leftrightarrow \frac{p_1}{2p_1p_2-1} < \frac{1}{3p_2-2m-2} \Leftrightarrow$$

$$3p_1p_2 - (2m+2)p_1 < 2p_1p_2 - 1 \Leftrightarrow p_1p_2 - (2m+2)p_1 + 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{p_1}{2p_1p_2-1} < \frac{1}{3p_2-2m-2} \Leftrightarrow 3p_1p_2 - (2m+2)p_1 < 2p_1p_2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$p_1p_2 - (2m+2)p_1 + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{r_3}{r_1} - (2m+2)\frac{r_2}{r_1} + 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$-2m + \frac{\mu_1+\mu_2}{r_1} - (2m+2)\frac{\mu_1}{r_1} = -2m + \frac{\mu_2 - \mu_1(2m+1)}{r_1} < 0,$$

що правда в силу умови (0.6).

Згідно з твердженням 1.2, для такого C_0 буде виконуватись наступна нерівність

$$\phi_1^{2p_1p_2-1}\phi_2^{2m+1} \leq |\phi_1|^{2p_1p_2-1}|\phi_2|^{2m+1} \leq \frac{1}{1+C_0}|\phi_1|^{(1+C_0)(2p_1p_2-1)} + \frac{C_0}{1+C_0}|\phi_2|^{1+\frac{1}{C_0}}.$$

2.3.2. Оцінка другого доданка

Оцінемо окремо кожний доданок з виразу

$$-u\phi_2^{2p_2-1} + 4^m\frac{p_1k_1a_1k_3}{k_2^{2m+2}a_2}\left(\phi_1^{p_1-1}\phi_2^{2p_2+2m} + |\phi_1|^{(2m+2)p_1-1}|\phi_2|^{2p_2-1}\right).$$

Оцінка виразу $u\phi_2^{2p_2-1}$

Виберемо таке C_1, для якого виконується система

$$\begin{cases} (1+C_1)(2p_2-1) > 3p_2-1, \\ 1+\dfrac{1}{C_1} > 2. \end{cases}$$

Отже, розкриваючи дужки, отримуємо наступну систему

$$\begin{cases} C_1 > \dfrac{p_2}{2p_2-1}, \\ 0 < C_1 < 1. \end{cases}$$

Очевидно $\dfrac{p_2}{2p_2-1} > 0$. До того ж проміжок $\left(\dfrac{p_2}{2p_2-1}; 1\right)$ – не пустий, бо

$$\frac{p_2}{2p_2-1} < 1 \Leftrightarrow p_2 < 2p_2-1 \Leftrightarrow 1 < p_2,$$

що правда в силу умови (0.6).

Оберемо $C_1 > 0$, яке належить проміжку $\left(\dfrac{p_2}{2p_2-1}; 1\right)$. Згідно з твердженням 1.2, для такого C_1 буде виконуватись наступна нерівність

$$u\phi_2^{2p_2-1} \leq |u||\phi_2|^{2p_2-1} \leq \frac{1}{1+C_1}|\phi_2|^{(1+C_1)(2p_2-1)} + \frac{C_1}{1+C_1}|u|^{1+\frac{1}{C_1}}.$$

Оцінка виразу $\phi_1^{p_1-1}\phi_2^{2p_2+2m}$

Виберемо таке C_2, для якого виконується система

$$\begin{cases} (1+C_2)(p_1-1) > 2p_1p_2-1+(2m+1)p_1, \\ (1+\dfrac{1}{C_2})(2p_2+2m) > 3p_2-1. \end{cases}$$

Отже, здійснюючи необхідні елементарні перетворення, отримуємо наступну систему

$$\begin{cases} C_2 > \dfrac{2p_1p_2 + 2mp_1}{p_1 - 1}, \\ \dfrac{1}{C_2} > \dfrac{p_2 - 1 - 2m}{2p_2 + 2m}. \end{cases}$$

1. $\quad p_2 < 2m + 1 \Rightarrow \dfrac{p_2 - 1 - 2m}{2p_2 + 2m} < 0 \Leftrightarrow C \in \left(\dfrac{2p_1p_2 + 2mp_1}{p_1 - 1}; +\infty\right)$

2. $\quad p_2 > 2m + 1 \Rightarrow C \in \left(\dfrac{2p_1p_2 + 2mp_1}{p_1 - 1}; \dfrac{2p_2 + 2m}{p_2 - 1 - 2m}\right)$

   Покажемо, що проміжок не пустий:

$$\frac{2p_1p_2 + 2mp_1}{p_1 - 1} < \frac{2p_2 + 2m}{p_2 - 1 - 2m} \Leftrightarrow$$

$$p_1p_2^2 + mp_1p_2 - p_1p_2 - mp_1 - 2mp_1p_2 - 2m^2p_1 < p_1p_2 + mp_1 - p_2 - m \Leftrightarrow$$

$$p_1p_2^2 - (2 + m)p_1p_2 - 2m(1 + m)p_1 + p_2 + m < 0 \Leftrightarrow$$

$$p_1(p_2 + m)(p_2 - 2(1 + m)) + p_2 + m < 0 \Leftrightarrow$$

$$p_1p_2 < 2p_1 - 1 \leq (2m + 2)p_1 - 1,$$

де нерівність $p_1p_2 < 2p_1 - 1$ можна отримати наступним чином:

$$\begin{aligned} &p_1p_2 < 2p_1 - 1 \Leftrightarrow \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} < 2 \cdot \frac{r_2}{r_1} - 1 \Leftrightarrow \\ &r_3 < 2r_2 - 1 \Leftrightarrow r_3 - r_2 < r_2 - r_1 \Leftrightarrow \mu_2 < \mu_1, \end{aligned} \tag{2.2}$$

що правда в силу умови (0.6).

Оберемо $C_2 > 0$, яке належить відповідному проміжку. Згідно з твердженням 1.2, для такого C_2 буде справедливою наступна нерівність

$$\begin{aligned} \phi_1^{p_1-1}\phi_2^{2p_2+2m} &\leq |\phi_1|^{p_1-1}|\phi_2|^{2p_2+2m} \\ &\leq \frac{1}{1 + C_2}|\phi_1|^{(1+C_2)(p_1-1)} + \frac{C_2}{1 + C_2}|\phi_2|^{(1+\frac{1}{C_2})(2p_2+2m)}. \end{aligned}$$

Оцінка виразу $|\phi_1|^{(2m+2)p_1-1}|\phi_2|^{2p_2-1}$

Виберемо таке C_3, для якого виконується система

$$\begin{cases}(1+C_3)((2m+2)p_1-1) > 2p_1p_2-1+(2m+1)p_1,\\ \left(1+\dfrac{1}{C_3}\right)(2p_2-1) > 3p_2-1.\end{cases}$$

Отже, розкриваючи дужки, отримуємо наступну систему

$$\begin{cases}C_3 > \dfrac{2p_1p_2-p_1}{(2m+2)p_1-1},\\ 0 < C_3 < \dfrac{2p_2-1}{p_2}.\end{cases}$$

Очевидно $\dfrac{2p_1p_2-p_1}{(2m+2)p_1-1} > 0$. Крім того, проміжок $\left(\dfrac{2p_1p_2-p_1}{(2m+2)p_1-1}; \dfrac{2p_2-1}{p_2}\right)$ – не пустий, бо

$$\frac{2p_1p_2-p_1}{(2m+2)p_1-1} < \frac{2p_2-1}{p_2} \Leftrightarrow$$

$$2p_1p_2^2-p_1p_2 < 4(m+1)p_1p_2-2(m+1)p_1-2p_2+1 \Leftrightarrow$$

$$(2p_2-1)p_1p_2 < 2(2p_2-1)(m+1)p_1-(2p_2-1) \Leftrightarrow$$

$$p_1p_2 < 2p_1-1 < (2m+2)p_1-1,$$

що є правдою в силу умови (2.2).

Оберемо $C_3 > 0$, яке належить проміжку $\left(\dfrac{2p_1p_2-p_1}{(2m+2)p_1-1}; \dfrac{2p_2-1}{p_2}\right)$. Згідно з твердженням 1.2, для такого C_3 буде справедливою наступна нерівність

$$|\phi_1|^{(2m+2)p_1-1}|\phi_2|^{2p_2-1} \le \frac{1}{1+C_3}|\phi_1|^{(1+C_3)((2m+2)p_1-1)} + \frac{C_3}{1+C_3}|\phi_2|^{\left(1+\frac{1}{C_3}\right)(2p_2-1)}.$$

2.3.3. Оцінка третього доданка

Оцінемо доданок

$$-\frac{p_2 k_2 a_2}{k_3^2 a_3} u \phi_2^{p_2-1} \left(\frac{k_3 p_1 k_1 a_1}{k_2^{2m+2} a_2} \phi_1^{p_1-1} \left(\phi_2 - \phi_1^{p_1}\right)^{2m+1} - u - \phi_2^{p_2} \right).$$

Позначимо

$$G(\phi) = \phi_2^{p_2-1} \left(A_0 \phi_1^{p_1-1} \cdot \left(\phi_2 - \phi_1^{p_1}\right)^{2m+1} - u - \phi_2^{p_2} \right), \text{ де } A_0 = \frac{p_1 k_1 a_1 k_3}{k_2^{2m+2} a_2}.$$

Далі нам знадобляться наступні два зауваження

Зауваження 2.1. Покажемо, що

$$((2m+2)p_1 - 1)\frac{\mu_2 + r_3}{r_3} > 2p_1 p_2 - 1 + (2m+1)p_1$$

Дійсно, враховуючи, що $p_1 = \dfrac{r_2}{r_1}, p_2 = \dfrac{r_3}{r_2}$ та (0.6), маємо

$$\begin{aligned}
&\frac{(2m+1)r_2 + \mu_1}{r_1} \cdot \frac{\mu_2 + r_3}{r_3} > \frac{r_3 + 2mr_2 + \mu_1}{r_1} \Leftrightarrow \\
&\frac{(2m+1)(r_2\mu_2 + r_2 r_3) + \mu_1 r_3 + \mu_1 \mu_2}{r_3} > r_3 + 2mr_2 + \mu_1 \Leftrightarrow \\
&2mr_2\mu_2 + r_2\mu_2 + \mu_1\mu_2 + r_2 r_3 + 2mr_2 r_3 > r_3^2 + 2mr_1 r_2 \Leftrightarrow \\
&2mr_2\mu_2 + r_2\mu_2 + r_3(r_2 - r_3) + \mu_1\mu_2 > 0 \Leftrightarrow \\
&2mr_2\mu_2 + r_2\mu_2 - r_3\mu_2 + \mu_1\mu_2 = 2mr_2\mu_2 + \mu_2(r_2 - r_3) + \mu_1\mu_2 = \\
&= 2mr_2\mu_2 - \mu_2^2 + \mu_1\mu_2 > 2mr_2\mu_2 - \mu_2^2 + \mu_2^2 = 2mr_2\mu_2 > 0.
\end{aligned}$$

Зауваження 2.2. Легко показати, що $(2m + p_2 + \delta)(2 - \dfrac{1}{p_2}) \geq 2p_2 - 1$.

Очевидно, що

$$G(\phi) \leq |\phi_2|^{2p_2-1} + |\phi_2|^{p_2-1} \left| A_0 \phi_1^{p_1-1} \cdot \left(\phi_2 - \phi_1^{p_1}\right)^{2m+1} - u \right|$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{застосуємо твердження 1.2 для } a = |\phi_2|^{p_2-1} \text{ та} \\ b = \left|A_0\phi_1^{p_1-1}\cdot(\phi_2-\phi_1^{p_1})^{2m+1}-u\right|^{\frac{r_3}{r_3}}, C = \dfrac{p_2}{p_2-1}. \text{ Причому} \\ (p_2-1)(1+C) = 2p_2-1, \\ 1+\dfrac{1}{C} = 1+\dfrac{p_2-1}{p_2} = 1+\dfrac{\frac{r_3}{r_2}-1}{\frac{r_3}{r_2}} = 1+\dfrac{r_3-r_2}{r_3} = \dfrac{\mu_2+r_3}{r_3} = 2-\dfrac{1}{p_2}\end{array}\right]$$

$$\leq 2|\phi_2|^{2p_2-1} + \left|A_0\phi_1^{p_1-1}\cdot(\phi_2-\phi_1^{p_1})^{2m+1}-u\right|^{\frac{\mu_2+r_3}{r_3}}$$

$$\left[\text{застосуємо твердження 1.1 для } (\phi_2-\phi_1^{p_1})^{2m+1}\right]$$

$$\leq 2|\phi_2|^{2p_2-1} + \left|A_0\phi_1^{p_1-1}\cdot 4^m\left(|\phi_2|^{2m+1}+|\phi_1|^{(2m+1)p_1}\right)-u\right|^{\frac{\mu_2+r_3}{r_3}}$$

$$\left[\text{введемо позначення } A_1 = A_0\cdot 4^m\right]$$

$$= 2|\phi_2|^{2p_2-1} + \left|A_1\phi_1^{p_1-1}|\phi_2|^{2m+1}+A_1|\phi_1|^{(2m+2)p_1-1}-u\right|^{\frac{\mu_2+r_3}{r_3}}$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{застосуємо твердження 1.2 для } a = \phi_1^{p_1-1} \text{ та } b = |\phi_2|^{2m+1}, \\ C = \frac{(2m+1)p_1}{p_1-1}. \text{ Причому, справедливо наступне} \\ (p_1-1)(1+C) = (2m+1)p_1+p_1-1 = (2m+2)p_1-1, \\ (2m+1)(1+\dfrac{1}{C}) = \dfrac{(2m+2)p_1-1}{p_1} = 2m+\dfrac{2r_2-r_1}{r_2} = \\ = 2m+\dfrac{r_2+\mu_1}{r_2} = 2m+\dfrac{r_2+\mu_1+\mu_2-\mu_2}{r_2} = 2m+p_2+\delta, \\ \text{де } \delta = \dfrac{\mu_1-\mu_2}{r_2} > 0\end{array}\right]$$

$$\leq 2|\phi_2|^{2p_2-1} + \left|2A_1|\phi_1|^{(2m+2)p_1-1}+A_1|\phi_2|^{2m+p_2+\delta}-u\right|^{\frac{\mu_2+r_3}{r_3}}$$

$$\left[\text{застосуємо твердження 1.1, покладемо } A_2 = 3^{\frac{\mu_2}{r_3}}\cdot max((2A_1)^{\frac{\mu_2+r_3}{r_3}},1)\right]$$

$$\leq 2|\phi_2|^{2p_2-1} + A_2\left(|\phi_1|^{((2m+2)p_1-1)\frac{\mu_2+r_3}{r_3}}+|\phi_2|^{(2m+p_2+\delta)(2-\frac{1}{p_2})}+|u|^{1+\frac{\mu_2}{r_3}}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Введемо позначення } \hat{\delta} = \dfrac{\mu_2}{r_3} > 0; \\ \text{Скориставшись зауваженнями 2.1 та 2.2, отримуємо}\end{array}\right]$$

$$\leq A_2\left(|\phi_1|^{2p_1p_2-1+(2m+1)p_1}+|u|^{1+\hat{\delta}}\right)+(2+A_2)|\phi_2|^{2p_2-1}$$

в достатньо малому околі нуля при $|\phi_i(x)| \leq 1, i = 1, 2, 3$.

Тобто

$$u \cdot G(\phi) \leq A_2 \cdot |u| \left(|\phi_1|^{2p_1p_2-1+(2m+1)p_1} + |u|^{1+\hat{\delta}} \right) + (2 + A_2)|u||\phi_2|^{2p_2-1}$$
$$= A_2|u||\phi_1|^{2p_1p_2-1+(2m+1)p_1} + (2 + A_2)|u||\phi_2|^{2p_2-1} + A_2|u|^{2+\hat{\delta}}$$

1. Очевидно $|u|^{2+\hat{\delta}} \leq u^2$, при $|u| \leq 1, \hat{\delta} > 0$.

2. Доданок $|u||\phi_2|^{2p_2-1}$ оцінюється за нерівністю з пункту 2.3.2.

3. Оцінемо доданок $|u||\phi_1|^{2p_1p_2-1+(2m+1)p_1}$ наступним чином.

   Виберемо таке $C_4 > 0$, для якого виконується система

$$\begin{cases} (1 + C_4)(2p_1p_2 - 1 + (2m + 1)p_1) > 2p_1p_2 - 1 + (2m + 1)p_1, \\ 1 + \dfrac{1}{C_4} > 2. \end{cases}$$

   Отже, розкриваючи дужки, отримуємо наступну систему

$$\begin{cases} C_4 > 0, \\ C_4 < 1. \end{cases}$$

   Згідно з твердженням 1.2, для такого C_4 виконується наступна нерівність

$$|\phi_1|^{2p_1p_2-1+(2m+1)p_1}|u| \leq \frac{1}{1 + C_4}|\phi_1|^{(1+C_4)(2p_1p_2-1+(2m+1)p_1)} + \frac{C_4}{1 + C_4}|u|^{1+\frac{1}{C_4}}.$$

2.3.4. Доведення від'ємної визначенности похідної функції Ляпунова

В силу оцінок отриманих в пунктах 2.3.1, 2.3.2 та 2.3.3 маємо:

$$\dot{V} = \dot{R}_1 + \dot{R}_2 + \dot{R}_3 \leq -\frac{1}{4^m k_2^{2m}}\phi_1^{2p_1p_2-1+(2m+1)p_1} - \phi_2^{3p_2-1} - \phi_3^2 + H(\phi),$$

де $H(\phi) = H(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ складається з таких членів, степені яких є вищими за степені головних доданків $-\frac{1}{4^m k_2^{2m}}\phi_1^{2p_1p_2-1+(2m+1)p_1}, -\phi_2^{3p_2-1}, -\phi_3^2$.

Отже, враховуючи неперервність $\phi_i(x)$ та $\phi_i(0) = 0$, існує проколотий окіл нуля такий, в якому $\dot{V}(x) < 0$. Оскільки $V(x) > 0$ при $||x|| \neq 0$, тривіальний розв'язок x = 0 є асимптотично стійким за Ляпуновим.

2.4. Приклад

Покладемо $k_1 = 3, k_2 = 5, k = 7, r_1 = 7, r_2 = 13, r_3 = 15, m = 1$. Тоді керування (0.5) має вигляд

$$u = -\left(\left((3x_1)^{\frac{13}{7}} + 5x_2\right)^{\frac{15}{13}} + 7x_3\right). \tag{2.3}$$

Згідно з отриманими в роботі результатами, керування u вигляду (2.3) стабілізує систему (0.2) для будь-яких додатних параметрів a_1, a_2, a_3. Таким чином, маємо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2^3, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_3, \\ \dot{x}_3 = -a_3\left(\left((3x_1)^{\frac{13}{7}} + 5x_2\right)^{\frac{15}{13}} + 7x_3\right). \end{cases} \tag{2.4}$$

Для наочності, зобразимо траєкторії системи (2.4), що відповідають різним наборам параметрів a_1, a_2, a_3, вибраних випадково. А саме:

a_1	a_2	a_3
82.077	68.857	89.731
78.306	95.691	53.534
71.209	63.922	68.926
58.489	54.414	51.134
96.719	88.202	59.977

В якості початкової точки виберемо, наприклад, точку $x_0 = (1, 1, 1)$.

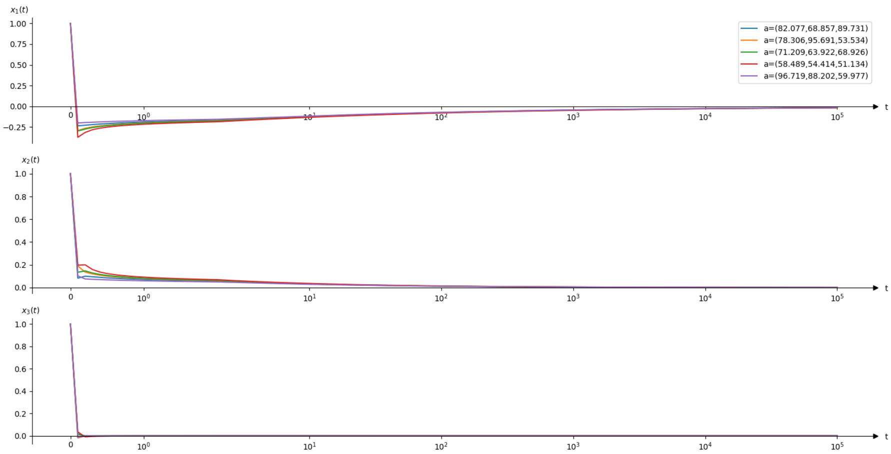


Рис. 2.1: Траєкторії $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$.

Також побудуємо траєкторії у тривимірному просторі, для різних наборів параметрів a_1, a_2, a_3, вибраних випадковим чином:

a_1	a_2	a_3
1.635	35.279	38.156
34.010	3.913	32.468
23.350	27.218	24.719

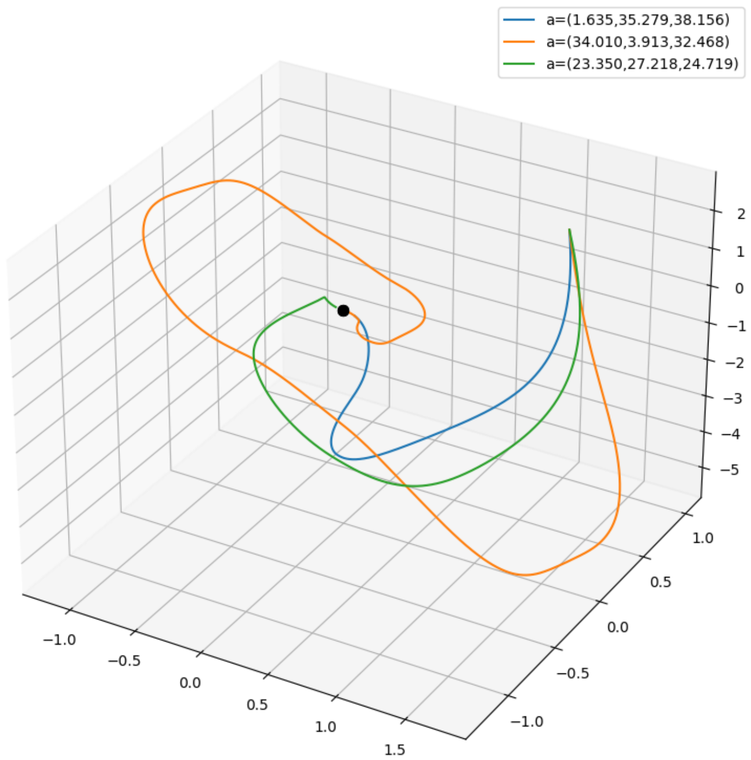


Рис. 2.2: Траєкторії $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$.

Висновки

В роботі вивчені задачі стабілізації для двовимірної та тривимірної нелінійних систем з невизначеностями при заздалегідь невідомих обмеженнях зверху на величину цих невизначеностей. Розглянуті системи є некерованими та нестійкими за першим наближенням. В роботі використано важливий для теорії керування клас вкладених керувань. Застосовано метод функції Ляпунова, який дозволяє показати, що розглянуті керування є стабілізуючими. Ефективність такого підходу проілюстрована на модельних прикладах. Результати даної роботи можуть бути застосовані для вивчення більш широкого класу систем. Наприклад, канонічних нелінійних систем більш високого порядку.

Список використаних джерел

[1] Michael Green, David J. N. Limebeer. Linear Robust Control. Dover Publications, Inc. Mineola, New York. 1995.

[2] Korobov, V.I., Lutsenko, A.V. Robust stabilization of one class of nonlinear systems. Automation & Remote Control. 2014. V. 75, No. 8. P. 1433—1444.

[3] Zhu J., Qian C. Local asymptotic stabilization for a class of uncertain upper-triangular systems. Automatica. 2020. V. 118. 108954.

[4] Bebiya M. O., Maistruk V. A. On linear stabilization of a class of nonlinear systems in a critical case. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. 2023. V. 98, P. 36–49.

[5] Korobov V. I., Bebiya M. O. Stabilization of one class of nonlinear systems. Automation and Remote Control. 2017. V. 78, No. 1. P. 1–15.

[6] Bebiya M. O., Korobov V. I. On Stabilization Problem for Nonlinear Systems with Power Principal Part. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2016. V. 12, No. 2. P. 113–133.

[7] Lin W., Qian C. Adding one power integrator: A tool for global stabilization of high-order lower-triangular systems. Systems & Control Letters. 2000. V. 39, No. 5. P. 339–351.

[8] Khalil H. K. Nonlinear systems third edition. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall. 2002.

Додатки

Для чисельного розв'язання згаданих рівнянь та побудови графіків було використано Python 3, бібліотеки matplotlib, numpy та scipy. Лістинги відповідних програм наведені нижче.

Лістинг 2.1: Побудова фазових портретів для прикладу 1.5

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from utils import *

fig, ax = plt.subplots()
ax.grid()
ax.set_aspect('equal')
ax.set_xlabel('$x_1$')
ax.set_ylabel('$x_2$')
x = np.linspace(-10, 10, 50)
xx, yy = np.meshgrid(x, x)
f1, f2 = f(0, [xx, yy], a=[10, 20], m=1, k=[2, 3], p=[17/13])
ax.streamplot(xx, yy, f1, f2, density=4)
plt.show()
```

Лістинг 2.2: Побудова траєкторій для прикладів 1.6, 2.4

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from utils import *

N = 3  # N=2
k = [3, 5, 7]
p = [13/7, 15/13]
fig, axes = plt.subplots(N, 1, figsize=(7, 5))

def build_loc(x0, a, m, k, p):
    s, t, label = build(x0, a, m, k, p)
    for i in range(len(axes)):
```

```
        axes[i].plot(t, s[i], lw=1.5, label=label)

for _ in range(5):
    build_loc([1]*N, np.random.random(N)*100, m=1, k=k[:N], p=p[:N-1])

for i in range(len(axes)):
    make_axes(axes[i], xlabel='t', ylabel='$x_{}(t)$'.format(i+1), scale='symlog', show=i == 0)
plt.show()
```

Лістинг 2.3: Побудова траєкторій для прикладу 2.4

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from utils import *

ax = plt.figure().add_subplot(projection='3d')

def build_loc(x0, a, m, k, p):
    s, t, label = build(x0, a, m, k, p)
    ax.plot(s[0], s[1], s[2], label=label)
    ax.scatter(0, 0, 0, s=50, c='black')
    ax.legend()

for _ in range(3):
    build_loc([1, 1, 1], np.random.random(3)*50, m=1, k=[3, 5, 7], p=[13/7, 15/13])

plt.show()
```

Лістинг 2.4: utils.py

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp

T = 100_000
t = np.linspace(0, T, 1_000_000)

def power(x, y):
    return np.sign(x) * np.power(np.abs(x), y)

```

```
def u(v, k, p):
    res: np.longdouble = k[0]*v[0]
    for i in range(len(v) - 1):
        res = power(res, p[i]) + k[i + 1] * v[i + 1]
    return -res

def f(_, v, a, m, k, p):
    res = [a[0] * power(v[1], 2*m+1)]
    for i in range(1, len(v) - 1):
        res.append(a[i] * v[i + 1])
    res.append(a[-1] * u(v, k, p))
    return res

def build(x0, a, m, k, p):
    res = solve_ivp(f, [0, T], x0, method='Radau', args=(a, m, k, p), dense_output=True)
    s = res.sol(t)
    label = ('a=('+('{:.3f},'*len(a))[:-1]+')').format(*a)
    return s, t, label

def make_axes(ax, xlabel, ylabel, lspine_pos=('outward', 0.0), show=False, scale='linear'):
    ax.spines['bottom'].set_position('zero')
    ax.spines['left'].set_position(lspine_pos)
    ax.spines['top'].set_visible(False)
    ax.spines['right'].set_visible(False)
    ax.plot(1, 0, ">k", transform=ax.get_yaxis_transform(), clip_on=False)
    if lspine_pos == 'zero':
        ax.plot(0, 1, "^k", transform=ax.get_xaxis_transform(), clip_on=False)
    ax.set_xlabel(xlabel, labelpad=-24, x=1.035)
    ax.set_ylabel(ylabel, labelpad=-21, y=1.02, rotation=0)
    if show:
        ax.legend(loc='upper right')
    ax.set_xscale(scale)
```